TD2 : Calcul approché d'intégrales

Le calcul d'intégrales nécessite en général de trouver des primitives, ce qui est parfois très difficile.

Dans ce TD, on verra comment calculer des intégrales de manière approchée, sans supposer être capable de calculer la moindre primitive

Méthode des rectangles :

La façon la plus simple d'approcher une intégrale est de faire une somme de Riemann :

On approche $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ par $\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)$.

On appelle ce procédé la "méthode des rectangles", car elle revient à approcher, sur chaque intervalle $[x_k,x_{k+1}[$, la fonction f par $f(x_k)$ et donc l'intégrale $\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\mathrm{d}x$ par le rectangle de hauteur $f(x_k)$.

```
def integrale_rectangles(f,a,b,n):
    """integrale_rectangles(f,a,b,n) calcule l'intégrale
      de f sur [a,b], par la méthode des rectangle, en divisant
      l'intervale en n sous-intervalles"""
    R=0
    for k in range(n):
        R=R+f(a+(b-a)*k/n)*(b-a)/n
    return R
```

Questions :

*** Taper** `integrale_rectangles?` **dans la console pour obtenir de l'aide sur la fonction** `integrale_rectangles`

*** Utiliser cet algorithme pour avoir une estimation de $\int_{-1}^{1} sin(x)/x\mathrm{d}x$, et de $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x$.**

Remarque : pour accéder aux fonctions `sin` **et** `sqrt` **(et au nombre π dont vous aurez besoin dans la suite), il vous faudra tout d'abord avoir exécuté**

```
from math import sin, sqrt, pi
```

*** Dans le cas particulier de $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x$ quelle est la valeur exacte de l'integrale ?**

Calcul de l'erreur

Pour l'intégrale $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x$, dont on connaît la valeur exacte, on peut calculer l'erreur (c'est à dire la valeur absolue de la différence entre la valeur exacte de l'intégrale et la valeur approchée obtenue par la méthode des rectangles), afin de la représenter graphiquement

Définir une fonction qui calcule l'erreur commise quand on estime cette intégrale par la méthode des rectangles pour une valeur arbitraire de n :

```
def erreur_rectangles(n):
    ...........
```

À vous de compléter les ..... avec les instructions pertinentes.

Représentation graphique de l'erreur

ci dessous, on calcule l'erreur pour $n \in \{10,20,30,\ldots,350\}$, puis on les représente sur une échelle logarithmique (à la fois en abscisses et en ordonnées)

```
valeurs_de_n=range(10,351,10)
from matplotlib import pyplot
pyplot.close()
pyplot.plot(valeurs_de_n,[erreur_rectangles(n) for n in valeurs_de_n],"g.")
pyplot.loglog()
pyplot.show()
```

Remarquer que l'erreur est proche de $K\times n^{\alpha}$, pour une certaine constante K et une certaine puissance α.

Estimer la valeur de K et de α.

Méthode des trapèzes :

Une méthode un peu plus élaborée consiste à approcher par des trapèzes :

on approche $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ par $\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f(x_k)+f(x_{k+1})}{2}$

Questions :

1. Faire un dessin et constater que cette méthode revient à approcher, sur chaque intervalle $[x_k,x_{k+1}[$, la fonction f par un segment de droite reliant les points de coordonnées respectives $(x_k,f(x_k))$, et $(x_{k+1},f(x_{k+1}))$

2. Définir une fonction `integrale_trapezes`**, analogue à** `integrale_rectangles` **mais qui approche l'intégrale par la méthode des trapèzes**

3. Pour l'integrale $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x$, représenter graphiquement, en fonction de `n`**, l'erreur de calcul de l'intégrale par la méthode des trapèzes et par celle des rectangle. Laquelle est plus précise ? Déterminer des constantes K et α telles que pour la méthode des trapèzes, l'erreur soit proche de $K \times n^\alpha$**

```
def integrale_trapezes(f,a,b,n):
    ...........
```

Méthode de Simpson

Désormais, sur chaque intervalle $[x_k,x_{k+1}[$, on approche la fonction f par un arc de parabole passant par les points de coordonnées $(x_k,f(x_k))$, $\left(\frac{x_k+x_{k+1}}{2},f(\frac{x_k+x_{k+1}}{2})\right)$, et $(x_{k+1},f(x_{k+1}))$

Montrer qu'il existe une unique polynôme $\mathbf{P}_k$ de degré (inférieur ou égal à) 2 qui satisfait

$$\begin{cases} P_k(x_k) = f(x_k) \\ P_k\left(\dfrac{x_k+x_{k+1}}{2}\right) = f\left(\dfrac{x_k+x_{k+1}}{2}\right) \\ P_k(x_{k+1}) = f(x_{k+1}) \end{cases}$$

Calculer (en fonction de $f(x_k)$, de $f\left(\frac{x_k+x_{k+1}}{2}\right)$ et de $f(x_{k+1})$), l'intégrale de $\mathbf{P}_k$ sur $[\mathbf{x}_k,\mathbf{x}_{k+1}[$

Définir en conséquence la fonction `integrale_simpson` **qui calcule $\sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} P_k(x)\mathrm{d}x$**

```
def integrale_simpson(f,a,b,n):
    .....................
```

Représentation graphique

Comparer graphiquement la vitesse de convergence de la méthode de Simpson avec celle des deux méthodes précédentes.

Estimer des constantes K et α telles que pour la méthode de Simpson, l'erreur soit proche de $K \times n^\alpha$

Représentation graphique pour sin x/x

Comment pourrait-on procéder pour estimer l'erreur dans le calcul de $\int_{-1}^1 sin(x)/x\mathrm{d}x$?

Représenter graphiquement l'erreur de la méthode des trapèzes et de celle de Simpson. Estimer dans chacun de ces deux cas des constantes K et α telles que l'erreur soit proche de $K \times n^\alpha$.

Qu'est-ce qui peut expliquer que la vitesse de convergence soit si différente de celle obtenue pour $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x$?