Dans cette séance, on considère diverses méthodes de simulations de variables aléatoires continues.

On rappelle que la fonction de répartition d'une variable aléatoire X est la fonction $F : x \mapsto \mathbb{P}[X \leqslant x]$.

I. Fonctions de répartition

1. Généralités

Soit $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction strictement croissante telle que $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$ et $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$. On note par F^{-1} sa fonction réciproque.

Soit U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[0,1]$.

Déterminer la fonction de répartition de la variable aléatoire $F^{-1}(U)$.

2. Exemple de la loi exponentielle

On a vu précédemment que la loi uniforme se simule à l'aide de la fonction `uniform` du module `random`

On rappelle de plus qu'une variable aléatoire suit la loi exponentielle de paramètre λ si elle admet (sur $\mathbb{R}$) la densité $f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x > 0. \end{cases}$

1. Calculez la fonction de répartition de la loi exponentielle, de paramètre λ.
2. Écrire une fonction qui utilise le résultat précédent pour simuler une loi exponentielle.

   Vous vérifierez numériquement que votre fonction approche bien une loi exponentielle.

```
from random import uniform
def simul_exponentielle(lambda_):
    ....
```

II. Méthode de rejet

1. Loi uniforme sur un disque

Justifiez que la fonction ci-dessous tire un point du disque (de centre zéro et de rayon 1) selon la loi uniforme

```
def unif_disque():
    while True:
        x,y=uniform(-1,1),uniform(-1,1)
        if x**2+y**2<1: return (x,y)
```

Pourquoi cette méthode s'appelle-t-elle "méthode de rejet" ?

2. Densité arbitraire

On peut utiliser la méthode précédente pour simuler une loi de densité arbitraire (aux seules conditions que la densité soit bornée et à support compact). En effet si on note X l'abscisse d'un point tiré aléatoirement de manière uniforme sur le domaine entre la courbe d'une fonction f positive et l'axe des abscisses, on montre aisément que X admet pour densité la fonction f (si l'intégrale de f vaut 1).

Utiliser cette méthode pour simuler une variable aléatoire dont la densité vaut $1-|x|$ (pour $x \in [-1,1]$).

III. Loi normale :

Montrer que si U et V sont deux variables indépendantes de loi uniforme sur $[0,1]$, alors $X = \sqrt{-2\ln(U)}\cos(2\pi V)$ et $Y = \sqrt{-2\ln(U)}\sin(2\pi V)$ sont indépendantes et de même loi : la loi normale centrée réduite.

En déduire une fonction qui simule une loi normale centrée réduite.

IV. Processus de Poisson : temps d'attente d'un autobus.

On considère un autobus qui passe à un arrêt à des horaires donnés par un processus de poisson de paramètre $\lambda = 1\,h$. C'est à dire que les temps entre deux passages de bus successifs suivent des lois exponentielles indépendantes, de paramètre $\lambda = 1\,h$ (et le temps entre minuit et le premier passage du bus est aussi une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 1\,h$, indépendante des autres).

Une personne qui ne sait pas à quelle heure passera le bus se rend à l'arrêt de bus à une heure aléatoire de la journée (choisie uniformément). Comme le temps moyen de passage entre les bus est de 1h, elle s'attend à attendre en moyenne 30min avant d'avoir le bus.

Effectuer des simulations et vérifier si le temps d'attente moyen est bien 30 min.