

Dans cette séance, on considère diverses méthodes de simulations de variables aléatoires continues.

On rappelle que la fonction de répartition d'une variable aléatoire X est la fonction $F : x \mapsto \mathbb{P}[X \leq x]$.

I. Fonctions de répartition

1. Généralités

Soit $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction strictement croissante telle que $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$. On note par F^{-1} sa fonction réciproque.

Soit U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[0,1]$.

Déterminer la fonction de répartition de la variable aléatoire $F^{-1}(U)$.

2. Exemple de la loi exponentielle

On a vu précédemment que la loi uniforme se simule à l'aide de la fonction `uniform` du module `random`

On rappelle de plus qu'une variable aléatoire suit la loi exponentielle de paramètre λ si elle admet (sur \mathbb{R}) la densité $f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x > 0. \end{cases}$

1. Calculez la fonction de répartition de la loi exponentielle, de paramètre λ .
2. Écrire une fonction qui utilise le résultat précédent pour simuler une loi exponentielle.
Vous vérifierez numériquement que votre fonction approche bien une loi exponentielle.

```
from random import uniform
def simul_exponentielle(lambda_):
    ....
```

II. Méthode de rejet

1. Loi uniforme sur un disque

Justifiez que la fonction ci-dessous tire un point du disque (de centre zéro et de rayon 1) selon la loi uniforme

```
def unif_disque():
    while True:
        x,y=uniform(-1,1),uniform(-1,1)
        if x**2+y**2<1: return (x,y)
```

Pourquoi cette méthode s'appelle t'elle "méthode de rejet" ?

2. Densité arbitraire

On peut utiliser la méthode précédente pour simuler une loi de densité arbitraire (aux seules conditions que la densité soit bornée et à support compact). En effet si on note X l'abscisse d'un point tiré aléatoirement de manière uniforme sur le domaine entre la courbe d'une fonction f positive et l'axe des abscisses, on montre aisément que X admet pour densité la fonction f (si l'intégrale de f vaut 1).

Utiliser cette méthode pour simuler une variable aléatoire dont la densité vaut $1 - |x|$ (pour $x \in [-1,1]$).

III. Loi normale :

Montrer que si U et V sont deux variables indépendantes de loi uniforme sur $[0,1]$, alors $X = \sqrt{-2 \ln(U)} \cos(2\pi V)$ et $Y = \sqrt{-2 \ln(U)} \sin(2\pi V)$ sont indépendantes et de même loi : la loi normale centrée réduite.

En déduire une fonction qui simule une loi normale centrée réduite.

IV. Processus de Poisson : temps d'attente d'un autobus.

On considère un autobus qui passe à un arrêt à des horaires donnés par un processus de poisson de paramètre $\lambda = 1 h$. C'est à dire que les temps entre deux passages de bus successifs suivent des lois exponentielles indépendantes, de paramètre $\lambda = 1 h$ (et le temps entre minuit et le premier passage du bus est aussi une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 1 h$, indépendante des autres).

Une personne qui ne sait pas à quelle heure passera le bus se rend à l'arrêt de bus à une heure aléatoire de la journée (choisie uniformément). Comme le temps moyen de passage entre les bus est de 1h, elle s'attend à attendre en moyenne 30min avant d'avoir le bus.

Effectuer des simulations et vérifier si le temps d'attente moyen est bien 30 min.