CC1 : Coefficients binomiaux

Durée de l'épreuve : 1h

Vous pouvez répondre aux questions de manière concise, mais la précision de vos réponses sera un élément important de la notation des copies. À elles seules, les parties I et II peuvent donner une note fort respectable (17/20 si les réponses sont correctes et brièvement justifiées) et la partie III permettra de gagner des points supplémentaires (et/ou de compenser d'éventuelles erreurs dans les parties précédentes).

I. Rappels

On rappelle que pour tous entiers naturels $p \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$, le coefficient binomial $\binom{n}{p}$ est défini comme étant le cardinal de l'ensemble $\{A \in \mathcal{P}(\{1,2,\ldots,n\}) | \mathrm{Card}(A) = p\}$. Par convention, lorsque $n = 0$, la notation $\{1,2,\ldots,n\}$ désigne l'ensemble vide.

On rappelle aussi que pour deux entiers $a < b$, `range(a,b)` calcule la liste `[a,a+1,a+2,...,b-1]` (liste qui compte b-a éléments). En revanche si $a \geqslant b$, alors `range(a,b)` est la liste vide (c'est à dire `[]`).

I.1 Expression en terme de factorielle

Pour des entiers naturels p et n arbitraires exprimer $\binom{n}{p}$ à l'aide de la fonction “factorielle”.

I.2 Première relation de récurrence

Écrire une relation de récurrence que satisfont les coefficients binomiaux.

I.3 Autre relation de récurrence

Un étudiant affirme :

Pour énumérer les parties $A \in \mathcal{P}(\{1,2,\ldots,n\})$, on peut poser $i = \max(A)$ et une fois fixée la valeur de i il ne reste qu'à fixer les $p-1$ autres valeurs, parmi l'ensemble $\{1,2,\ldots,i-1\}$. En conséquence $\displaystyle\binom{n}{p} = \sum_{i=1}^{n} \binom{i-1}{p-1}$.

Cette affirmation, qui fournirait une autre relation de récurrence pour les coefficients binomaux, vous semble-t-elle correcte ?

II. Calcul des coefficients binomiaux

Trois étudiants écrivent chacun une fonction `binomial` en Python telle que `binomial(n,p)` calcule $\binom{\mathtt{n}}{\mathtt{p}}$.

Pour chacune de leurs réponses (proposées ci-dessous) déterminer ce que renvoie Python quand on exécute `binomial(1,0)` puis argumenter pour déterminer si la fonction proposée par l'étudiant est correcte.

Si la réponse proposée par l'étudient n'est pas correcte, proposez une modification qui la rend correcte.

II.1 Réponse du premier étudiant

```
def binomial(n,p):
    if n==0:
        return 1
    else:
        return binomial(n-1,p)+binomial(n-1,p-1)
```

II.2 Réponse du deuxième étudiant

```
def factorielle(n):
    r=1
    for i in range(1,n+1):
        r=r*i
    return r
def binomial(n,p):
    if p>=0 and p<=n:
        return factorielle(n)/(factorielle(p)*factorielle(n-p))
    else:
        return 0
```

II.3 Réponse du troisième étudiant

```
def binomial(n,p):
    if p==0 and n==0:
        return 1
    r=0
    for i in range(1,n+1):
        r=r+binomial(i-1,p-1)
    return r
```

III. Énumération des combinaisons

Écrire une fonction qui, quand on l'exécute en Python, liste l'ensemble des combinaisons de p éléments parmi n, c'est à dire l'ensemble $\{A \in \mathcal{P}(\{1,2,\ldots,n\})|\mathrm{Card}(A) = p\}$.